ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION (T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1988

MATHÉMATIQUES

2ème ÉPREUVE

OPTION T.A.

(Durée de l'épreuve 4 heures)

## PARTIE - I

Dans toute cette partie, x est un réel positif fixé, non entier.

I.1 a) Soit la fonction $u_1$ définie sur $[-\pi, +\pi]$ par $u_1(t) = \cos(xt)$. Montrer qu'il existe une et une seule fonction u, $2\pi$- périodique, paire, prolongeant la fonction $u_1$ sur $\mathbb{R}$.

Soit la fonction $v_1$ définie sur $]-\pi, +\pi[$ par $v_1(t) = \sin(xt)$. Montrer qu'il existe une et une seule fonction v, $2\pi$- périodique, impaire, prolongeant la fonction $v_1$ sur $\mathbb{R}$. On précisera les valeurs de $v(\pi)$.

b) Dessiner, pour $x = \frac{2}{3}$, les graphes des fonctions u et v.

c) Calculer les deux intégrales :

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(xt)\cos(nt)dt \qquad B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(xt)\sin(nt)dt$$

où n est un entier naturel.

d) Montrer que les fonctions u et v sont développables en série de Fourier et expliciter ces développements.

I.2 a) Montrer que :

$$\frac{1}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{\pi x} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{x^2 - n^2}, \quad \operatorname{cotg}(\pi x) = \frac{1}{\pi x} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x^2 - n^2}.$$

b) Déduire des relations précédentes les sommes des deux séries :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x}{x^2 - (2n+1)^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x^2 - 4n^2}.$$

I.3 Etablir la relation :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{x^2 - (2n+1)^2} = \frac{\pi}{4\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$

## PARTIE - II

L'objet de cette partie est le calcul des fonctions F et G définies par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{ch}(xt)}{\operatorname{ch} t}\,dt \qquad G(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sh}(xt)}{\operatorname{sh} t}\,dt$$

à l'aide de développements en série.

Dans toute cette partie, x est un élément fixé de $]-1, +1[$.

II.1 On désigne par f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(t) = \frac{\operatorname{ch}(xt)}{\operatorname{ch} t}$

a) Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

b) Calculer F(0) et $F\left(\frac{1}{2}\right)$.

II.2 Pour tout entier n positif ou nul, on désigne par $f_n$ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$f_n(t) = 2(-1)^n \operatorname{ch}(xt)\, e^{-(2n+1)t}$ et on considère la suite $\left(J_n(x)\right)_{n\geq 0}$ où : $J_n(x) = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

a) Etablir la convergence de cette intégrale et calculer $J_n(x)$.

b) Pour tout entier naturel p, on pose :

$$S_p = \sum_{n=0}^{p} f_n \qquad \text{et } R_p = f - S_p .$$

Calculer $S_p$ puis $R_p$.

c) Montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$.
En déduire une majoration de la fonction $|R_p|$ sur $[0, +\infty[$ et montrer que : $\lim_{p\to\infty} \int_0^{+\infty} R_p(t)dt = 0$ .

II.3 a) Prouver que :

$$\forall x \in ]-1, +1[ \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(x).$$

b) En déduire, à l'aide notamment de I.3, la valeur de F(x) pour $x \in ]-1, +1[$ et contrôler à l'aide de $F\left(\frac{1}{2}\right)$.

II.4 On désigne par g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(t) = \dfrac{sh(xt)}{sht} & \text{si } t > 0 \\ g(0) = x \end{cases}$$

a) Montrer que la fonction g est continue sur $[0, +\infty[$ et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ est convergente.

b) Calculer G(0) et $G\left(\frac{1}{2}\right)$.

II.5 En utilisant une méthode analogue à celle des questions II.2 et II.3, déterminer la valeur de G(x) pour $x \in ]-1, +1[$ et contrôler à l'aide de $G\left(\frac{1}{2}\right)$.

## PARTIE - III

L'objet de cette partie est le calcul des fonctions A et B définies par :

$$A(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\ sh(xt)}{ch\ t}\,dt \qquad \text{et } B(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\ ch(xt)}{sh\ t}\,dt .$$

III.1 Etablir les convergences des intégrales précédentes lorsque $x \in ]-1, +1[$.

III.2 Prouver que les fonctions F et G sont de classe $C^1$ sur $]-1, +1[$ et que : $A = F'$ et $B = G'$.

On pourra introduire les suites $(F_n)_{n>0}$ et $(G_n)_{n>0}$ de fonctions définies sur $]-1, +1[$ par :

$$F_n(x) = \int_0^n \frac{ch(tx)}{cht}\,dt \quad \text{et} \quad G_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{sh(tx)}{sht}\,dt$$

III.3 En déduire les valeurs de A(x) et de B(x).

***

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail